

Е.А. Севостьянов, А. Маркиш (Житомирский государственный университет им. И. Франко)

Є.О. Севостьянов, А. Маркиш (Житомирський державний університет ім. І. Франко)

E.A. Sevost'yanov, A. Markysh (Zhitomir Ivan Franko State University)

О равностепенной непрерывности одного класса отображений, квазиконформных в среднем

Изучается поведение открытых дискретных отображений, квазиконформных в среднем. Доказано, что семейства таких отображений равностепенно непрерывны (нормальны) в заданной области.

Про одностайну неперервність одного класу відображень, квазіконформних у середньому

Вивчається поведінка відкритих дискретних відображень, квазіконформних у середньому. Доведено, що сім'ї таких відображень одностайно неперервні (нормальні) в заданій області.

On equicontinuity of some class of mappings, which are quasiconformal in the mean

A behavior of open discrete mappings, which are quasiconformal in the mean, is investigated. It is proved that the classes of mappings mentioned above are equicontinuous (normal).

1. Введение. В относительно недавних статьях [1] и [2] рассмотрены вопросы о локальном поведении классов отображений, характеристика квазиконформности $Q(x)$ которых подчинена некоторому интегральному условию, выражаемому при помощи заданной функции $\Phi(x)$ (см. там же). Такие отображения мы называем отображениями, квазиконформными в среднем. В частности, в работе [1] рассмотрены классы гомеоморфизмов, характеристика которых может меняться (зависеть от отображения), в то время как в статье [2] «мажоранта» $Q(x)$ является фиксированной, общей для всего рассматриваемого семейства. Основная цель настоящей заметки – распространить результаты работы [2] на случай «переменной» мажоранты $Q(x)$, когда класс отображений определяется только функцией $\Phi(x)$, а не функцией Q , отвечающей за искажение модуля семейств кривых. При этом, усиление полученных ниже результатов в сравнении с работой [1] состоит в том, что здесь рассматриваются открытые дискретные отображения, а не только гомеоморфизмы.

Основные определения и обозначения, использующиеся ниже, могут быть найдены в монографии [3] либо статьях [1] и [2].

Как обычно, для множеств E и $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ символ $\Gamma(E, F, D)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D . Здесь и далее h – хордальная метрика (см. [4]). Следующая конструкция может быть найдена в работе [5]. Пусть $Q(x, t) = \{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x, y) < t\}$ – сферический шар с центром в точке x радиуса t . Для $x \in \overline{\mathbb{R}^n}$, множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ и чисел $0 < r < t < 1$ полагаем $\tilde{x} = -\frac{x}{|x|^2}$,

$$\begin{cases} m_t(E, r, x) = M(\Gamma(\partial Q(x, t), E \cap \overline{Q(x, r)})), \\ m(E, x) = m_{\sqrt{3}/2}(E, \frac{\sqrt{2}}{2}, x), \end{cases}$$

и, кроме того,

$$\begin{cases} c(E, x) = \max\{m(E, x), m(E, \tilde{x})\}, \\ c(E) = \inf_{x \in \overline{\mathbb{R}^n}} c(E, x). \end{cases} \quad (1)$$

Пусть $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ – неубывающая выпуклая функция. Обозначим через $\mathfrak{R}_{M, \Delta}^\Phi$ семейство всех открытых дискретных кольцевых Q -отображений в D , таких что $c(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \Delta$ и

$$\int_D \Phi(Q(x)) \frac{dm(x)}{(1 + |x|^2)^n} \leq M.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $\Phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ – неубывающая выпуклая функция. Если

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \quad (2)$$

для некоторого $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$, то класс $\mathfrak{R}_{M, \Delta}^\Phi$ является равностепенно непрерывным, и, следовательно, образует нормальное семейство отображений при всех $M \in (0, \infty)$ и $\Delta \in (0, 1)$.

Ещё раз подчеркнём, что в определении класса $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$ функция Q не участвует; два различных отображения f_1 и f_2 , которым соответствуют разные функции Q_1 и Q_2 , могут, вообще говоря, принадлежать одному классу $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$.

2. Лемма об оценке искажения. Пусть $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ – класс всех открытых дискретных кольцевых Q -отображений f в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, таких что $c(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \Delta > 0$. Для доказательства теоремы 1 установим справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. Пусть $\Delta > 0$ и $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая функция. Тогда

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{c_n \Delta} \cdot \frac{1}{\int_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}} \quad (3)$$

для каждого $f \in \mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ и $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, $\varepsilon(x_0) < \text{dist}(x_0, \partial D)$, где $c_n > 0$ зависит только от n и $q_{x_0}(r)$ – среднее интегральное значение функции $Q(z)$ на сфере $|z - x_0| = r$.

Доказательство. Применим подход, использованный при доказательстве леммы 2 в [6]. Полагаем $\varepsilon_0 := \varepsilon(x_0)$. Для фиксированного отображения $f \in \mathfrak{R}_{Q,\Delta}$ рассмотрим конденсаторы $E = (A, C)$ и $f(E) = E' = (f(A), f(C))$, где $C := \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $A = B(x_0, \varepsilon_0)$. Условимся, что для конденсатора E символ Γ_E обозначает семейство всех кривых вида $\gamma : [a, b] \rightarrow A$, таких что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$ для произвольного компакта $F \subset A$, где $|\gamma| = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a, b] : \gamma(t) = x\}$. Пусть $\Gamma_{E'}$ и Γ_E – соответствующие семейства кривых для конденсаторов E и E' , соответственно. Ввиду предложения 10.2 гл. II в [7] имеем $M(\Gamma_{E'}) = \text{cap } f(E)$. Полагая $E_f := \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)$, заметим, кроме того, что $\Gamma(f(C), E_f) > \Gamma_{E'}$ (см. теорему 1.1.46 в [8]) и, следовательно, в силу свойства минорирования модуля (см. теорему 6.4 в [4]) и леммы 1 в [9]

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \leq M(\Gamma_{E'}) = \text{cap } f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}, \quad (4)$$

где ω_{n-1} – площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n и

$$I = I(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}.$$

С другой стороны, согласно теореме 3.14 в [5]

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq \beta \min\{c(f(C)), c(E_f)\}, \quad (5)$$

где постоянная β зависит только от n . Поскольку для каждого связного множества F в $\overline{\mathbb{R}^n}$ имеет место неравенство $c(F) \geq a_n h(F)$, где $h(F)$ – хордальный диаметр множества F , а a_n – некоторая постоянная (см. следствие 3.13 в [5]), будем иметь

$$c(f(C)) \geq a_n \cdot h(f(C)). \quad (6)$$

Известно, что $c(E) \leq \omega_{n-1} \cdot (\log \sqrt{3})^{1-n}$ для любого множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ (см. соотношение (3.7) в [5] и определение функции $c(\cdot)$ в (1)), так что

$$\frac{c(E)}{\omega_{n-1} \cdot (\log \sqrt{3})^{1-n}} \leq 1 \quad \forall E \subset \overline{\mathbb{R}^n}. \quad (7)$$

Предположим, что \min в правой части (5) равен $c(f(C))$, тогда в силу соотношений (6) и (7)

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq \beta \cdot a_n \cdot h(f(C)) \geq \frac{\beta \cdot a_n \cdot h(f(C))c(E_f)}{\omega_{n-1} \cdot (\log \sqrt{3})^{1-n}}. \quad (8)$$

Пусть $\min\{c(f(C)), c(E_f)\} = c(E_f)$, тогда из (5) следует, что

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq c(E_f) \geq h(f(C))c(E_f). \quad (9)$$

Полагая $c_n := \min \left\{ 1, \frac{\beta \cdot a_n}{\omega_{n-1} \cdot (\log \sqrt{3})^{1-n}} \right\}$, из (8) и (9) будем иметь, что

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq c_n \cdot h(f(C))c(E_f) \geq c_n \Delta h(f(C)). \quad (10)$$

Из соотношений (4) и (10) вытекает, что

$$h(f(C)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{c_n \Delta I^{n-1}}. \quad (11)$$

Выберем теперь произвольно $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$, $x \neq x_0$, тогда найдётся $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, такое что $|x - x_0| = \varepsilon$. Поскольку в сделанных выше обозначениях $x \in C$, то согласно оценке (11) мы получим, что

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{c_n \Delta I^{n-1}},$$

что и доказывает лемму. \square

3. Доказательство теоремы 1. Идея доказательства соответствует подходу, использованному при установлении теоремы 4.1 в [1]. По лемме 3.1 в [1] имеем оценку

$$\int_{|x-x_0|}^{\rho} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \int_{\varepsilon}^1 \frac{dr}{r q^{\frac{1}{n-1}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}}, \quad (12)$$

где $\varepsilon = |x - x_0|/\rho$, $q(r) = q_{x_0}(\rho r)$ и

$$M(\varepsilon) = \frac{1}{\Omega_n \rho^n (1 - \varepsilon^n)} \int_R \Phi(Q(z)) dm(z),$$

$R = \{z \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < |z - x_0| < \rho\}$ – кольцо с центром в точке x_0 и Ω_n – объём единичного шара \mathbb{B}^n в \mathbb{R}^n . Т.к. $|z| \leq |z - x_0| + |x_0| \leq \rho(x_0) + |x_0|$, получаем, что

$$M(\varepsilon) \leq \frac{\beta_n(x_0)}{\Omega_n (1 - \varepsilon^n)} \int_R \Phi(Q(z)) \frac{dm(z)}{(1 + |z|^2)^n},$$

где $\beta_n(x_0) = (1 + (\rho(x_0) + |x_0|)^2)^n / \rho^n(x_0)$. Следовательно, при $\varepsilon \leq 1/\sqrt[n]{2}$ и, в частности, при $\varepsilon \leq 1/2$,

$$\Phi(0) \leq M(\varepsilon) \leq \frac{2\beta_n(x_0)}{\Omega_n} M.$$

Таким образом, из оценки (12) вытекает, что для всех x , таких что $|x - x_0| < \rho(x_0)/2$, имеет место неравенство

$$\int_{|x-x_0|}^{\rho} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int_{\lambda_n \beta_n(x_0) M}^{\frac{\Phi(0)\rho^n}{|x-x_0|^n}} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}}, \quad (13)$$

где λ_n – некоторая постоянная, зависящая только от n . Тогда из (3) и (13) вытекает, что

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{c_n \Delta} \cdot \frac{n}{\int_{\lambda_n \beta_n(x_0) M}^{\frac{\Phi(0)\rho^n}{|x-x_0|^n}} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}}},$$

откуда ввиду условия (2) вытекает равностепенная непрерывность класса $\mathfrak{R}_{M,\Delta}^\Phi$ в точке x_0 . \square

Список литературы

- [1] *Ryazanov V. and Sevost'yanov E.* Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 2011. – **36**. – P. 231–244.
- [2] *Севостьянов Е.А.* О пространственных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику // Алгебра и анализ. – 2012. – **24**, № 1. – С. 131–156.
- [3] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
- [4] *Väisälä J.* Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
- [5] *Vuorinen M.* Some inequalities for the moduli of curve families // Michigan Math. J. – 1983. – **30**. – P. 369–380.
- [6] *Севостьянов Е.А.* О равностепенно непрерывных семействах отображений, не принимающих значения из переменного множества // Укр. матем. ж. – 2014. – **66**, № 3. – С. 361–370.
- [7] *Rickman S.* Quasiregular mappings. – Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [8] *Кураатовский К.* Топология, т. 2. – М.: Мир, 1969.

- [9] *Севостьянов Е.А.* Об интегральной характеристике некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций // Укр. матем. ж. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1367–1380.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Евгений Александрович Севостьянов,

Антонина Александровна Маркиш

Житомирский государственный университет им. И. Франко

ул. Большая Бердичевская, 40

г. Житомир, Украина, 10 008

e-mail: esevostyanov2009@mail.ru, tonya@bible.com.ua